Σ半環上の加群の係数制限と係数拡大による新たな線形論理モデルの構成

伊藤 耀 [1]　中野 圭介 [2]　浅田 和之 [2]　菊池 健太郎 [2]
（1）東北大学工学部　（2）東北大学電気通信研究所

ポスターの電子版がこちらにあります.
https://www.ipl.riec.tohoku.ac.jp/dokuwiki/_media/public/ppl23poster-ito.pdf

1. 背景

線形論理
- 仮定の複製や不使用の分析を目的に誕生
  - 縮約と弱化を！付きの命題に限定
- 直観主義論理を包摂
  - 直観主義論理から直観主義線形論理への忠実な翻訳がある
- モデルの例
  - Coh：Coherence spaceの圏　[Girard '87]
  - Fin：Finiteness spaceの圏　[Erhard '05]
  - OrdRel (= ScottL)：順序集合とイデアル関係の圏　[Erhard '11]

$(A \Rightarrow B)^* \coloneqq\, !A^* \multimap B^*$

Curry-Howardで線形λ計算と対応
→関数型プログラミング言語の分析

線形論理のモデルの種類： LNL随伴，Lafontモデル，“有限的モデル”
同じ圏でも！の作り方が複数ある
- 例：OrdRelでは、
  - ！が多重集合Mult ⇒ Lafontモデル　（ $|\mathrm{Mult}(\{0,1,2\})| = \infty$ ）
  - ！がべき集合$\mathcal{P}$　⇒ 有限的モデル　（ $|\mathcal{P}(\{0,1,2\})| = 8$ ）

応用では，Lafontモデルと有限的モデルが共に用いられることも
- 有限的モデルはアルゴリズム的成果を得やすい
- Lafontモデルはその正当性の証明に使いやすい

Lafontモデルの！は“自由生成”

上の多重集合は非冪等な交差型，
べき集合は冪等な交差型に対応

加群の圏による線形論理モデル [Tsukada&Asada '22]
- 任意のVが（局所表現可能な）モノイダル閉圏のとき，
  任意の（V中の）モノイドRに対し，（V中の）**R加群の圏はLafontモデル**
- $V = \Sigma$-Monのとき，Coh, Fin, PCohは，それぞれ適当なRに対して，
  “可算次元”R加群の圏と同値で，またOrdRelはそのサブモデルとなる

2. 目的と方針

目的
- 線形論理の加群モデルのフレームワークにおいて，
  Lafontモデル以外に（有限的モデルなどの）良い性質を持つモデルを構成

方針
- 加群のLafontモデルのLNL随伴と，係数制限・係数拡大の随伴とを合成することで，新たな線形論理のモデルを構成する　}今回の成果
- 構成したモデルの具体的分析や既存のモデルとの比較
  - [Tsukada&Asada '22]のΣ半環Rの具体例に対して分析
  - 一つのR（R-Mod）に対してΣ半環の準同型$f : S \to R$は複数あり，多くの分析候補がある
- [Tsukada&Asada '22]の**可算次元**加群による**古典**線形論理モデルの構成方法と本手法との組み合わせが可能か　}今後の課題

3. 直観主義線形論理

- 文法　$A \coloneqq P \mid A \otimes A \mid 1 \mid A \multimap A \mid !A$
- 推論規則

$$\frac{}{A \vdash A}\,\text{恒等} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\,\text{カット} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma' \vdash A}\,\text{交換（}\Gamma'\text{は}\Gamma\text{の並べ替え）}$$

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}\otimes_L \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}\otimes_R \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}\multimap_L \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\multimap_R \qquad \frac{}{\vdash 1}1$$

$$\frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}!_R \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}!_L \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\,\text{弱化} \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\,\text{縮約}$$

4. モノイダル閉圏

（対称）モノイダル閉圏 $(\mathcal{M}, \otimes, I)$
- 双関手 $-\otimes-: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$と対象 $I \in \mathrm{ob}(\mathcal{M})$
- 任意の $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathcal{M})$について以下を満たす
  - 結合律　$(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$
  - 単位律　$A \otimes I \cong A \cong I \otimes A$
  - 交換律　$A \otimes B \cong B \otimes A$
- 任意の $B \in \mathrm{ob}(\mathcal{M})$ に右随伴関手$B \multimap -: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$が存在

命題Aの解釈: $[\![A]\!] \in ob(\mathcal{M})$
- $[\![1]\!] \coloneqq I$
- $[\![A_1 \otimes \cdots \otimes A_n]\!] \coloneqq [\![A_1]\!] \otimes \cdots \otimes [\![A_n]\!]$
- $[\![B \multimap C]\!] \coloneqq [\![B]\!] \multimap [\![C]\!]$

$$\frac{f : A \otimes B \longrightarrow C}{\lambda(f) : A \longrightarrow B \multimap C}$$

モノイダル閉圏の例
- 集合と関係の圏Rel：⊗を集合の直積, Iを一元集合
- 順序集合とイデアル関係の圏OrdRel：⊗を順序集合の直積, Iを一元集合
- 可換群の圏Abel：⊗を可換群のテンソル積, Iを整数の加法群$\mathbb{Z}$
- R加群の圏R-Mod：⊗を加群のテンソル積, IをモノイドR

5. LNL随伴

Linear-Non-Linear adjunction（LNL随伴）$F \dashv G$
- モノイダル閉圏 $(\mathcal{M}, \otimes, \multimap)$ とカルテシアン閉圏 $(\mathcal{C}, \times, \Rightarrow)$
- モノイダル関手 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ と $G : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}$ が（モノイダル）随伴になる
  - モノイダル関手：モノイダル積を緩やかに保つ関手
    $FA \otimes FB \longrightarrow F(A \times B)$　　$GC \times GD \longrightarrow G(C \otimes D)$

$$\frac{FA \longrightarrow B \text{ in } \mathcal{M}}{A \longrightarrow GB \text{ in } \mathcal{C}}$$

Linear exponential comonad 「！」
- LNL随伴$F \dashv G$について関手$! : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$を$! \coloneqq F \circ G$と定義
- 任意の$A \in \mathrm{ob}(\mathcal{M})$が可換コモノイド$(!A, e_A, d_A)$ を成す
  $e_A : !A \to I$　　$d_A : !A \to !A \otimes !A$

命題の解釈
- $[\![!A]\!] \coloneqq\, ![\![A]\!]$

！の構造の例
- 関係の圏Rel：$!A \coloneqq \mathrm{Mult}(A)$
- 順序集合とイデアル関係の圏OrdRel：$!A \coloneqq \mathrm{Mult}(A)$ or $!A \coloneqq \mathcal{P}(A)$

6. 証明木の解釈

$A_1, \cdots, A_n \vdash B$の証明木$D$を圏$\mathcal{M}$の射$[\![D]\!] : [\![A_1]\!] \otimes \cdots \otimes [\![A_n]\!] \longrightarrow [\![B]\!]$に解釈
- 例：$[\![\Gamma, !A, !A \vdash B]\!] : [\![\Gamma]\!] \otimes ![\![A]\!] \otimes ![\![A]\!] \longrightarrow [\![B]\!]$
  $[\![\vdash A]\!] : I \longrightarrow [\![A]\!]$
- 解釈は最後の規則の場合分けで帰納的に行われる

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\,\text{弱化} \qquad\qquad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\,\text{縮約}$$

- コモノイド構造射$e_A : !A \longrightarrow I$
- $\Gamma \otimes !A \xrightarrow{id_\Gamma \otimes e_A} \Gamma \otimes I \xrightarrow{\cong} \Gamma \longrightarrow B$
- コモノイド構造射$d_A : !A \longrightarrow !A \otimes !A$
- $\Gamma \otimes !A \xrightarrow{id_\Gamma \otimes d_A} \Gamma \otimes !A \otimes !A \longrightarrow B$

7. Lafontモデル

($\mathcal{M}$中の)コモノイドの圏：自然にカルテシアン圏になる

- モノイダル閉圏$(\mathcal{M}, \otimes, I)$
- Comon$(\mathcal{M}, \otimes, I)$からの忘却関手$U$： Comon$(\mathcal{M}, \otimes, I) \longrightarrow (\mathcal{M}, \otimes, I)$の右随伴関手 Free : $(\mathcal{M}, \otimes, I) \longrightarrow$ Comon$(\mathcal{M}, \otimes, I)$がある
  - $(\mathcal{M}, \otimes, I)$から他の構造は存在すれば一意

命題　[Bierman '94]
Lafont圏$(\mathcal{M}, \otimes, I)$とComon$(\mathcal{M}, \otimes, I)$の関手$U$, FreeはLNL随伴$U \dashv$ Freeを成す

8. （V中の）加群

$(V, \widehat{\otimes}, \hat{1})$をモノイダル圏とする
- (V中の) モノイドR
  - $R \in \mathrm{ob}(V)$
  - $\mu : R \mathbin{\widehat{\otimes}} R \longrightarrow R,\ \eta : \hat{1} \longrightarrow R$
- (V中の) モノイドR上の加群M
  - $M \in \mathrm{ob}(V)$
  - RからNへの作用$\zeta : R \mathbin{\widehat{\otimes}} N \longrightarrow N$
- R-Mod：R加群と準同型からなる圏

V	(V中の)モノイド	(V中の)加群
Set	モノイド	作用付き集合
Abel (可換群)	環 (or 体)	加群 (or ベクトル空間)
Σ-Mon	**Σ半環**	**Σ加群**

9. 係数制限・係数拡大

Vの中のモノイドR, Sについて$\varphi : R \to S$がモノイド準同型のとき,

定義　（係数制限）
以下を満たす関手$\varphi^* : S$-Mod→ R-Modを係数制限の関手とする.
対象$N = (N, \zeta^N : S \otimes N \to N)$に対し，$\varphi^* N = \left(N, \zeta^{\varphi^* N} : R \otimes N \to N\right)$
例：整数と有理数の乗法モノイド$\mathbb{Z}$と$\mathbb{Q}$の間の準同型$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}$-加群Xについて$z \cdot_{\mathbb{Z}} x \coloneqq f(z) \cdot_{\mathbb{Q}} x$とすることで$\mathbb{Q}$-加群を$\mathbb{Z}$-加群とみなす

$$\begin{tikzcd} R \otimes N \arrow[r, "\varphi \otimes id_N"] \arrow[dr, "\zeta^{\varphi^* N}"'] & S \otimes N \arrow[d, "\zeta^N"] \\ & N \end{tikzcd}$$

定義　（係数拡大）
以下を満たす関手$\varphi_! : R$-Mod→ S-Modを係数拡大の関手とする.
対象$M = (M, \zeta^M : R \otimes M \to M)$に対し，$\varphi_! M = (S \otimes_R M, \zeta^{\varphi_! M} : S \otimes S \otimes_R M \to S \otimes_R M)$
- 例：$\mathbb{Z}$-加群Mについて
  - $\frac{1}{n} \cdot x \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M = (\mathbb{Q} \otimes M)/\sim$　$(m \cdot q,\ x) \sim (q,\ m \cdot x)$　$(x \in M,\ m, n \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Q})$
  - ↳ Mに整数の除法を追加した加群(= $\mathbb{Q}$加群)になる

10. 新たなモデルの構成

Vを完備かつ余完備なモノイダル閉圏とし，Vの中の加群を考える.

定理　(cf. [Guillou&May '17; Remark 5.10])
係数制限φ^*と係数拡大$\varphi_!$の関手はモノイダル関手である.
また, 係数制限φ^*と係数拡大$\varphi_!$の関手はモノイダル随伴になる.

系（主結果）
係数制限と係数拡大の随伴$\varphi_! \dashv \varphi^*$と
LNL随伴$U \vdash$ Freeとの合成は
LNL随伴$\varphi_! \circ U \dashv \mathrm{Free} \circ \varphi^*$になる.
→ S-Mod上の新しいモデルを得た.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Comon}(R\text{-Mod}) \arrow[r, shift left, "U"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[drr, shift left, "\varphi_! \circ U"] & R\text{-Mod} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Free}"] \arrow[d, shift left, "\varphi_!"] \arrow[d, phantom, "\vdash"] & \\ & S\text{-Mod} \arrow[u, shift left, "\varphi^*"] \arrow[ul, shift left, "\mathrm{Free} \circ \varphi^*", "\perp"'] & \end{tikzcd}$$

11. 今後の課題：Σ加群の圏と既存モデル

Σ加群の直観主義線形論理モデル：　[Tsukada&Asada '22]
- $V = \Sigma$-Monのときに，Σ半環Rに対し，R-ModがLafontモデル

Σ加群の古典線形論理モデル：
- Σ半環Rが一定の条件を満たすとき，基底付きR加群の圏もモデルになる
- 更に，“可算次元”の基底付きR加群の圏もモデルになる
  - 例：

Coh　≅ 可算次元 I加群の圏（$I = \{0,1\}$, $1 + \cdots + 1 = \perp$, $1 + \cdots = \perp$）
Fin　≅ 可算次元F加群の圏（$F = \{0,1\}$, $1 + \cdots + 1 = 1$, $1 + \cdots = \perp$）
OrdRel ⊆ 可算次元B加群の圏（$B = \{0,1\}$, $1 + \cdots + 1 = 1$, $1 + \cdots = 1$）
PCoh ≅ 可算次元[0,1]加群の圏（$[0,1] = \{r \mid 0 \le r \le 1\}$, $\sum_i r_i > 1 \Leftrightarrow \sum_i r_i = \perp$）

[Tsukada&Asada '22]："Linear-Algebraic Models of Linear Logic as Categories of Modules over Σ-Semirings", LICS, 2022
[Guillou&May '17]："Enriched model categories and presheaf categories", New York Journal of Mathematics, 2020